Trasmissione Numerica

@Oasitech http://www.oasitech.it

1) Introduzione

Per trasmissione numerica si intende un sistema di comunicazione in cui i segnali vengono inviati in via numerica sul canale; il segnale qualunque esso sia viene convertito in forma digitale, i bit convertiti in un qualunque alfabeto di simboli e poi mediante opportuna modulazione inviati sul canale di comunicazione.
In genere l'inviluppo complesso viene ad assumere la seguente forma:

$$\tilde{s}(t)=\sum_i a_i\, g(t-iT)$$

ove i è un indice che teoricamente va fino all'infinito, g(t) è un impulso ad energia finita su un intervallo finito(0, T) ove T è il cosiddetto intervallo di segnalazione; gli ai sono i simboli che inviamo sul canale contenenti i bit da trasmettere che sono stati ottenuti dalla digitalizzazione del segnale di partenza.
In questi casi parliamo di segnali ad energia finita

$$s(t)\epsilon\, L^2(a,b)$$

si definisce

- norma:

$$\|s(t)\|=\sqrt{[\int_0^T |s(t)|^2 dt]}$$

la radice dell'energia

- prodotto scalare

$$(s_{1,}\, s_2)=\int_0^T s_1(t)\, s_2(t)\, dt$$

- Disuguaglianza di Schwartz

$$|(s_{1,}\, s_2)|\le\|s_1\|\|s_2\|$$

Teorema

Dato un sottospazio S ad energia finita, le funzioni $[\phi_i(t)]\, i=1,2 \ldots\ldots,\infty$

costituiscono una base ortonormale se

$$(\phi_i,\phi_j)=\delta_{ij}$$

ove si è indicato la funzione delta di Kronecker, per cui per ogni s(t) ho una rappresentazione univoca

$$s(t)=\sum_{i=1}^{\infty} s_i \phi_i(t)$$

le s_i costituiscono le componenti del segnale s(t) rappresentabili ad esempio in uno spazio n-dimensionale.
Per esse si può ricorrere alla seguente formula inversa:

$$s_k=\int_0^T s(t)\,\phi_k(t)\,dt=\int_0^T \sum_{i=1}^{\infty} s_i \phi_i(t)\,\phi_k(t)$$

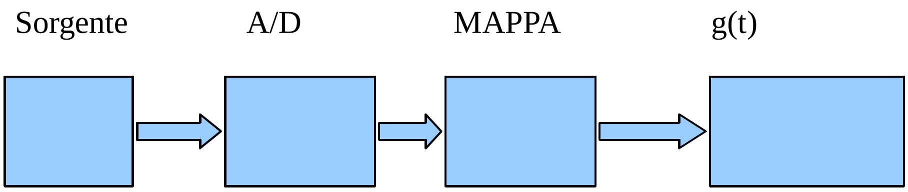
e sfruttando la proprietà della delta di kronecker

$\delta_{ij}=1$ per i=j e zero altrimenti

Il segnale

$$\tilde{s}(t)=\sum_i a_i\, g\,(t-iT)$$

è un segnale che in genere viene chiamo PAM (Pulse Amplitude Modulation) cioè un segnale modulato in ampiezza ad impulsi.
In genere esso può essere trovato nel seguente modo



Il segnale in arrivo da una certa sorgente, esempio, da un microfono, viene campionato quantizzato e digitalizzato a costituire una sequenza di bit che vengono poi trasferiti in un blocco che effettua una specie di mappaggio tra blocchi di bit e simboli appartenenti ad un determinato alfabeto. La successione di impulsi viene quindi inviata all'ingresso di un filtro con risposta impulsiva g(t) e poi il tutto viene modulato a radiofrequenza ed inviato sul canale. Ovviamente possiamo lasciare il tutto anche in banda base, ma questa non viene fatto in genere. La trasmissione in banda base viene effettuata ad esempio nel caso del segnale telefonico.
Nei canali wireless il tutto viene portato in radiofrequenza, dal momento che le equazioni di Maxwell predicono una forte attenuazione per segnali in bassa frequenza. Vedremo che lo spettro del segnale viene sagomato opportunamente dal filtro g(t); nella forma dello spettro ovviamente interviene anche il tipo dei simboli inviati, infatti ricordiamo il fatto che questo segnale costituisce un segnale aleatorio, cioè un processo aleatorio con una determinata funzione di autocorrelazione.
Vediamo quindi lo spettro di tali segnali dopo un richiamo alle nozioni basilari dei processi aleatori.

2) **Spettro di un segnale PAM**

Limitiamoci al momento allo spettro di segnali PAM in banda base

$$s(t)=\sum_i a_i g(t-iT)$$

- Autocorrelazione e densità spettrale di potenza di un processo:

$$R_S(t,t+\tau)=E[s(t)s(t+\tau)]$$

se il processo è stazionario essa dipende solo dalla differenza tra i due instanti di tempo presi in considerazione. Ricordiamo che un processo è stazionario in senso lato se vale la proprietà appena riportata, e se la media non dipende dal tempo.

$$\eta_S(t)=\eta$$

$$R_S(t,t+\tau)=R_S(\tau)$$

Un processo invece si dice ciclostazionario se:

$$\eta_s(t)=\eta_s(t+nT_0)\forall t,n$$

$$R_S(t,t+\tau)=R_S(t+nT_{0,}t+\tau+nT_0)\forall t,\tau,n$$

si verifica che il processo s(t) PAM è un processo ciclostazionario di periodo T.

Teorema di Wiener-Kinchin

La densità spettrale di potenza di un processo stazionario è pari alla Trasformata Continua di Fourier TCF della sua funzione di Autocorrelazione, per processi ciclostazionari è la trasformata della media della funzione di autocorrelazione del processo stesso.

$$\bar{R}_S(\tau)=\lim_{T_0\to\infty} 1/T_0\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_S(t,t+\tau)dt$$

se il processo è ciclostazionario la media può essere effettuata su un periodo:

$$\bar{R}_S(\tau)=1/T_0\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_S(t,t+\tau)dt$$

quindi

$$S_S(f)=\int_{-\infty}^{\infty} \bar{R}_S(\tau)e^{(-j2\pi f\tau)}d\tau$$

Per il segnale PAM otteniamo il seguente spettro

$$S_S(f)=\frac{1}{T}S_a(f)|G(f)|^2$$

ove

$$S_a(f)=T\sum_{-\infty}^{\infty} R_a(m)e^{-(j2\pi fmt)}$$

- Energia e Potenza di un segnale PAM

La potenza di un segnale PAM è :

$$\bar{R}_S(0)=1/T_0\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_S(t,t+\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty} S_s(f)df$$

cioè l'antitrasformata della dsp calcolata in 0.
L'energia sarà quindi

$$E_S=T_0\bar{R}_S(0)=\int_{-T_0/2}^{T_0/2} R_S(t,t)dt=\int_{-\infty}^{\infty} E[\sum a_i g(t-iT)\sum a_j g(t-jT)]dt$$

dove Es è anche detta energia per simbolo. Questa formula può essere ulteriormente sviluppata fino ad arrivare ad una forma piu' avanzata:

$$E_S=E[\sum a_i\sum a_j]\int_{-\infty}^{\infty} g(t-iT)g(t-jT)dt$$

poniamo $\beta=t-iT$ =>

$$E_S=\sum\sum Ra_{(i-j)}\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)g(\beta+iT-jT)d\beta$$

posto m = i-j

$$E_S=Ra(m)\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)g(\beta+mT)d\beta$$

3) **Strategia di decisione**

La strategia di decisione si basa sul criterio MAP.
Abbiamo M forme d'onda [Si(t)] i=1,...., M con ciascun segnale appartenente all'intervallo (0, T) ad energia finita. Ammettiamo la banda del canale sia molto maggiore di 1/T; ricordiamo che 1/T è la banda del segnale PAM in banda base, approssimativamente la banda del segnale a radiofrequenza, in tal modo evitiamo gli effetti di dispersione introdotti dal canale.
Ammettiamo che per ogni segnale ci sia associato un simbolo corrispondente α_i , allora la stima MAP Maximum a Posteriori è la seguente

α_k : $\max_i$ {p(α_i | **r**) }

dove **r** è l'osservato, cioè il vettore delle componenti del segnale ricevuto; sviluppando otteniamo che il criterio MAP è:

α_k : $\max_i$ {f(**r** | α_i) p(α_i)} ove i=1,.....M

avendo preso la funzione densità di probabilità dell'osservato conzionata al particolare simbolo inviato, posto:

r = (r1,....,rn)
si = (s1,......., sn)
w = (w1,....., wn)

le componenti del segnale ricevuto, dei singoli segnali, e del rumore lungo una base ortonormale con N generico, si può scrivere la formula di cui sopra e poi far tendere N all'infinito e ricavare la struttura del ricevitore ottimo.
Le componenti sono per ipotesi indipendenti l'una dall'altra, quindi

$$f_{\boldsymbol{r}}(\boldsymbol{r}|\alpha_i)=\frac{1}{[(\pi N_0)^{(N/2)}]}e^{[\frac{-(\sum_{j=1}^{N}(r_j-s_{ij})^2)}{N_0}]}$$

la sommatoria è rispetto a j=1,...., N
quindi per la stima del simbolo trasmesso si ha:

$$\breve{\alpha}_k : max_i[\ f\ (\boldsymbol{r}|\alpha_i)\ p\ (\alpha_i)]$$

da cui sviluppando segue:

$$max_i[\int_0^T r(t)s_i(t)\,dt+\frac{N_0}{2}\ln(p(\alpha_i))-\frac{E_{Si}}{2}]$$

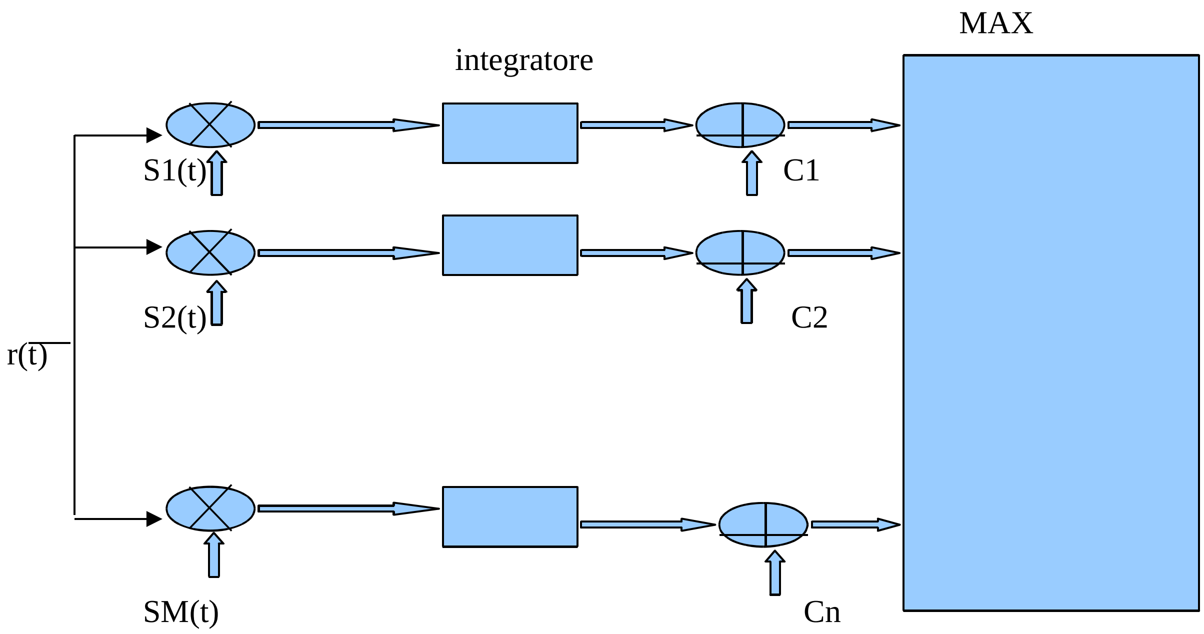
ovvero con la notazione dello spazio dei segnali ad energia finita:

$max_i[(r,s_i)+C_i]$

ove Ci sono delle costanti rispetto ad i:

$$C_i = \frac{N_0}{2}\ln(p(\alpha_i)) - \frac{E_{Si}}{2}$$

Abbiamo quindi il seguente decisore ottimo:



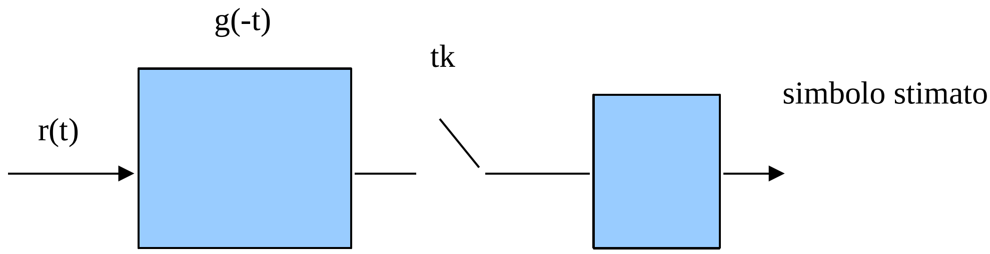
All'uscita abbiamo la stima del simbolo inviato; questo ricevitore è un ricevitore a minima distanza.
Come si vede il processo è tanto piu' oneroso quanto piu' aumentano il numero M dei segnali trasmessi.
In certi casi si può ricorrere a ricevitori piu' semplici che riescano a decidere non sequenza per sequenza ma simbolo per simbolo.

4) Decisione simbolo per simbolo

Quando non è richiesta la decisione sequenza per sequenza, è possibile ricorrere a una decisione simbolo per simbolo, meno onerosa per il ricevitore.
In tal caso possiamo utilizzare un ramo del ricevitore appena visto, campionare l'uscita e confrontare i campioni con una soglia scelta opportunamente. Ad esempio se i segnali sono equiprobabili e hanno la stessa energia, la soglia è a metà della loro distanza.
Nel caso di assenza di ISI su canale Gaussiano questa strategia coincide anche con quella ottima.
Si dimostra che il filtro di ricezione ottima è equivalente a un filtro adattato all'impulso trasmesso

g(t) => g(t0-t)

ove t0 è l'istante di campionamento, se scegliamo per semplicità t0 = 0 => g(-t), abbiamo



Supposto per semplicità il canale ideale C(f)=1 il segnale ricevuto sarà:

$$s(t)=\sum a_i g(t-iT)$$

$$r(t)=s(t)+w(t)=\sum_i a_i g(t-iT)+w(t)$$

ove con w(t) si indica il rumore bianco, termico, all'ingresso del filtro adattato.
All'uscita di quest'ultimo abbiamo:

$$x(t)=\sum_i a_i h(t-iT)+n(t)$$

ove

$$h(t)=g(t)*g(-t), n(t)=w(t)*g(-t)$$

infatti abbiamo, per la parte relativa al segnale:

$$s(t)*g(-t)=\sum_i a_i g(t-iT)*g(-t)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i a_i g(\alpha-iT)g(-(t-\alpha))d\alpha$$

da cui

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i a_i g(\alpha-iT)g(\alpha-t)d\alpha$$

poniamo $\beta=\alpha-iT$ =>

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i a_i g(\beta)g(\beta+iT-t)d\beta=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_i a_i g(\beta)g(\beta-(t-iT))d\beta$$

da cui:

$$\sum_i a_i\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)g(\beta-(t-iT))d\beta$$

essendo

$$h(t)=g(t)*g(-t)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\beta)g(\beta-t)d\beta$$

il termine tra parentesi è proprio h(t) centrato in t-iT.
Quindi

$$x(t)=\sum_i a_i h(t-iT)+n(t)$$

è il segnale da cui dobbiamo risalire ai simboli trasmessi ai, si campiona questo segnale e lo si confronta con una soglia. Ovviamente è bene tener presente che questa è una condizione ideale, in quanto c'è il problema di determinare il sincronismo tra il cosiddetto intervallo di segnalazione T e la frequenza di campionamento. Questa informazione può essere inviata nel preambolo oppure stimata dal segnale. Ammettiamo che il sincronismo sia perfetto e campioniamo in tk = kT ove k è un numero intero k = 0, 1, 2,......
otteniamo:

$$x(kT)=\sum_i a_i h(kT-iT)+n(kT)$$

omettendo T:

$$x(k)=\sum_i a_i h(k-i)+n(k)$$

ossia:

$$x(k)=a_k h(0)+\sum_{(i\neq k)} a_i h(k-i)+n(k)$$

otteniamo quindi il simbolo ak a meno di una interferenza detta appunto interferenza intersimbolica (stesso simbolo) e del rumore presente nel sistema di ricezione campionato in kT.
Ovviamente nel caso ideale vorremmo h(0) = 1 e nullo per multimpli di T diversi da zero; infatto posto k-i = m:

$$x(k)=a_k h(0)+\sum_{(m\neq 0)} a_{(k-m)} h(m)+n(k)$$

la condizione appena vista su h(k) si chiama condizione di Nyquist

$$h(m)=\delta(m)$$

ed è soddisfatta per particolari funzioni, in particolare per le cosiddette funzioni a coseno rialzato.
Possiamo esplicitare la condizione di Nyquist:

$$h(t)\Leftrightarrow H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{(-j2\pi ft)}dt$$

quindi discretizzando e prendendo H(f) periodica

$$\tilde{H}(f)=T\sum_{-\infty}^{\infty}h(m)e^{(-j2\pi fmT)}T=T\,h(0)=T$$

ma

$$\tilde{H}(f)=\sum_{-\infty}^{\infty}H(f-\frac{K}{T})$$

per cui la condizione di Nyquist diventa:

$$\sum_{-\infty}^{\infty}H(f-\frac{K}{T})=T$$

questa condizione è molto importante in quanto consente di definire sia la sagomatura del filtro in trasmissione ma soprattutto di abbattere l'interferenza intersimbolica(ISI), la quale molto spesso è presente soprattutto in area urbana dove si risente degli effetti di dispersività(allargamento temporale dell'impulso in ricezione) del canale trasmissivo.
La condizione può essere esplicitata nella seguente forma:

$$H(f)=G_N(f)\Leftrightarrow g_n(t): impulso\ di\ Nyquist$$

inoltre abbiamo:

$$g(t)\Leftrightarrow G(f),\, g(-t)\Leftrightarrow G^*(f)$$

da cui:

$$g(t)*g(-t)\Leftrightarrow G(f)G^*(f)=|G(f)|^2=H(f)=G_N(f)$$

quindi:

$$G(f)=\sqrt{(G_N(f))}$$

questo nel caso ideale che il canale, detta c(t) la sua risposta impulsiva sia ideale: C(f) = 1.
In molti casi pratici ovviamente questa condizione non è verificata; si ricorre allora a tecniche di equalizzazione analogiche, o numeriche.

5) Trasmissione numerica passa banda

Le proprietà dei segnali PAM vengono usate anche per trasmettere segnali passa banda. Questo è il caso soprattutto dei canali wireless, ovvero quando il canale è lo spazio libero. On tal caso il segnale PAM è l'inviluppo complesso:

$$\tilde{s}(t)=\sum_i a_i\, g(t-iT)$$

come si diceva i bit di informazione vengono mappati in un certo alfabeto di modulazione e previa opportuna modulazione il segnale viene inviato sul canale di trasmissione

Il segnale passa banda sarà:

$$s(t)=\Re[\tilde{s}(t)e^{(j\omega_0 t)}]$$

lo spettro del segnale sarà:

$$S(f)=\frac{(S_S(f-f_0)+S_S(f+f_0))}{4}$$

ove come sappiamo:

$$S_S(f)=\frac{1}{T}S_a(f)|G(f)|^2$$

è lo spettro del segnale in banda base.
Come nelle modulazioni analogiche abbiamo sostanzialmente tre tipi di modulazioni passa banda:

di ampiezza: ASK, QAM
di fase: M-PSK
di frequenza: FSK

ASK: Amplitude Shift Keying
PSK: Phase Shift Keying
FSK: Frequency Shift Keying

Molto usata è la PSK, ed anche la QAM. Quest'ultima soppianta la QPSK per elevate velocità di segnalazione.
Nella forma piu' generale possiamo scrivere:

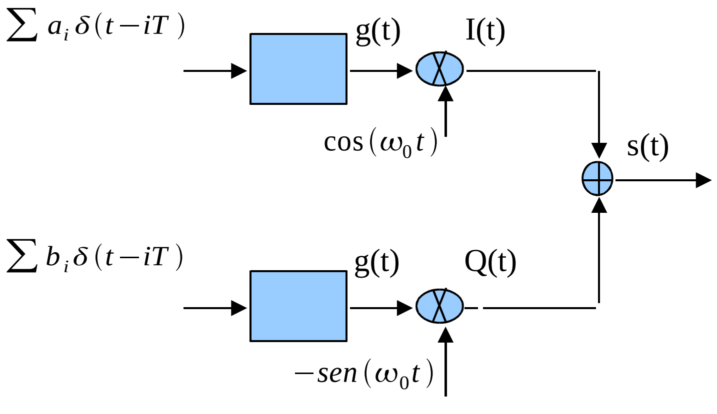
$$\tilde{s}(t)=\sum_i c_i g(t-iT)=\sum_i a_i g(t-iT)+j\sum_i bi\, g(t-iT)=I(t)+jQ(t)$$

ove i ci sono i simboli ora in generale complessi dell'afabeto di modulazione, ad esempio nella M-QPSK abbiamo:

$$c_i=[0,e^{(j\frac{(2\pi)}{M})},e^{(j\frac{(4\pi)}{M})},\ldots,e^{(j(2\pi)\frac{(M-1)}{M})}]$$

quindi: $\tilde{s}(t)=\Re(\tilde{s}(t)e^{(j\omega_0 t)})=I(t)\cos(\omega_0 t)-Q(t)\,sen(\omega_0 t)$

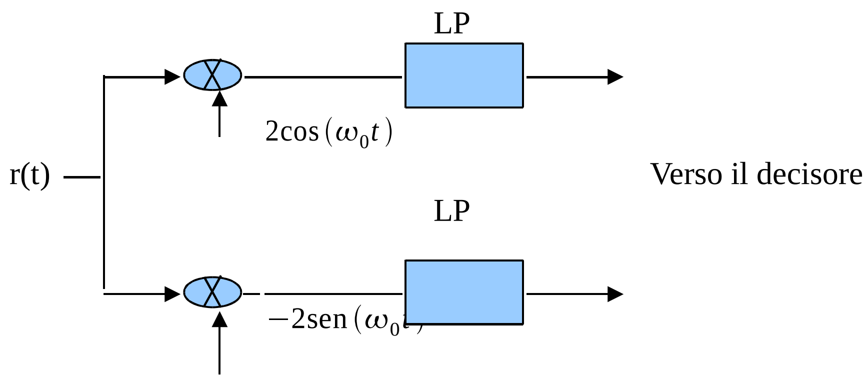
questa formula ci suggerisce la forma del modulatore usato in trasmissione, da cui segue il suo equivalente in banda base:



In ricezione abbiamo:

$$\tilde{r}(t)=\tilde{s}(t)*\left(\frac{\tilde{c}(t)}{2}\right)+\tilde{w}(t)$$

questo segnale è quello che entra in ingresso al filtro adattato:



In uscita abbiamo:

$$\tilde{x}(t)=\sum_i c_i h(t-iT)+\tilde{n}(t)$$

dove:

$$h(t)=g(t)*\left(\frac{(\tilde{c}(t))}{2}\right)*g(-t),\tilde{n}(t)=\tilde{w}(t)*\left(\frac{(g(-t))}{2}\right)$$

$\tilde{w}(t)$ è un processo con dsp $2N_0$ essendo w(t) un processo di rumore passa banda con dsp $N_0/2$.
Campionando agli istanti KT otteniamo in assenza di ISI:

$$\tilde{x}(k)=c_k+\tilde{n}(k)$$

ossia

$$\tilde{x_R}(k)=a_k+\tilde{n_R}(k)$$

$$\tilde{x_I}(k)=b_k+\tilde{n_I}(k)$$

da queste formule è possibile risalire alla probabilità di errore del sistema in ricezione.
La probabilità ha la seguente espressione, supponiamo α_i siano i valori assunti dai simboli ci:

$$P(e)=\sum p(e|c_k=\alpha_i)\,p(c_k=\alpha_i)$$

sfruttando la ben nota formula di Bayes.
Per la M-PSK abbiamo:

$$P(e)=2Q[\sqrt{((\frac{((2E_b\log_2 M))}{N_0})sen(\frac{\pi}{M}))}]$$

ove Q[ ] è la ben nota funzione coda

$$Q(x)=\int_x^{\infty}(\frac{1}{(2\pi)}e^{[\frac{(-x^2)}{(2)}]})$$

nelle espressioni di cui sopra la varianza viene assunta pari ad N0 in realtà può assumere valori diversi anche se spesso per comodità viene preso proprio tale valore.

- Esempio

Caso ASK

$$\tilde{s}(t)=\sum_i A_i g(t-iT)$$

in questo caso i simboli ci vengono ad essere delle ampiezze, i=1,,M nel caso in cui M=2 si ricade nella 2-PSK detta anche BPSK.

2-PSK A1=A, A2=-A
In assenza di ISI, e nel caso di canale ideale:

$$\tilde{r}(t)=\tilde{s}(t)+\tilde{w}(t)$$

$$\tilde{x}(t)=\tilde{s}(t)*g(-t)+\tilde{n}(t)=\sum_i A_i h(t-iT)+\tilde{n}(t)$$

$$\tilde{x}(k)=A_k+\tilde{n}(k)$$

Se i simboli sono equiprobabili:

$$P(e)=(\frac{1}{2})P(e|A1)+(\frac{1}{2})P(e|A2)=P(e|A1)$$

essendo la soglia in 0.

$$P(e|A1)=\int_{-\infty}^{0}[(\frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma^2)}})e^{(\frac{-(x-A)^2}{(2\sigma^2)})}dx]=\int_{-\infty}^{(-A/\sigma)}[(\frac{1}{\sqrt{(2\pi)}})e^{(\frac{-(t)^2}{(2)})}dt]=1-Q(\frac{-A}{\sigma})=Q(\frac{A}{\sigma})$$

avendo posto $t=\frac{(x-A)}{\sigma}$

in generale tale risultato viene espresso in funzione dell'energia per simbolo (o bit) e di N0.

Sappiamo che in questo caso:

$E_S=\frac{A^2}{2}$ quindi: $A=\sqrt{(2E_S)}$

$\sigma^2 = E[\tilde{n}(k)^2]$

$\tilde{n}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{w}(\alpha) g(\alpha - t) d\alpha]$ quindi:

$\tilde{n}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{w}(\alpha) g(\alpha - kT) d\alpha]$

da cui abbiamo

$\sigma^2 = E[\tilde{n}(k)^2] = \iint_{-\infty}^{\infty} E[\tilde{w}(\alpha) g(\alpha - kT) \tilde{w}(\beta) g(\beta - kT) d\alpha d\beta]$

quindi:

$\sigma^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} (2\mathrm{N}_0 \delta(\alpha - \beta) g(\beta - kT) g(\beta - kT) d\alpha d\beta) = (2\mathrm{N}_0) \int_{-\infty}^{\infty} [g^2(\beta - kT) d\beta]$

sfruttando le note proprietà della funzione Delta di Dirac.
Sapendo che nel caso ideale $h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\beta) d\beta = 1$

abbiamo proprio:

$\sigma^2 = 2\mathrm{N}_0$ => $\sigma = \sqrt{(2\mathrm{N}_0)}$

quindi la probabilità di errore può scriversi come:

$P(e) = Q(\frac{A}{\sigma}) = Q(\sqrt{(E_S / N_0)})$

come si vede essendo la funzione Q monotona decrescente, la probabilità è tanto piu' piccola quanto maggiore è l'energia per simbolo.

6)Parametri del Segnale PAM

Nelle modulazioni numeriche sono importanti le seguenti quantità

- Probabilità di errore P(e) espressa in funzione di Es su N0
- velocità di informazione

$$R_b=\frac{1}{T_b}$$

essendo Tb l'intervallo di trasmissione di un bit

- Efficienza spettrale

$$\eta=\frac{(\frac{1}{T_b})}{B}$$ ove B è la banda del segnale.

Se T è l'intervallo di segnalazione tra T e Tb esiste la seguente relazione per una modulazione con M segnali (es M-PSK)

$$T_b=\frac{T_S}{(\log_2 M)}$$

allo stesso modo tra l'energia per bit Eb e l'energia per simbolo la seguente:

$$E_b=\frac{E_S}{(\log_2 M)}$$

7) **Tecniche di equalizzazione**

In presenza di ISI si rende necessario prendere delle opportune contromisure, questo in genere si fa con tecniche di equalizzazione adattative, cioè che si adattano alle condizioni del canale; questo può essere per fatto per via analogica o per via numerica.

- Equalizzazione analogica

dovendosi avere:

$$G_N(f)=G(f)G^*(f)C(f)=|G(f)|^2 C(f)$$

ponendo un filtro equalizzatore in ricezione ho:

$$G_N(f)=|G(f)|^2 C(f)E(f), E(f)=\frac{(G_N(f))}{(|G(f)|^2 C(f))}$$

- Equalizzazione numerica

In tal caso posso porre un filtro e(k) numerico all'uscita del campionatore. Prendendo ad esempio il caso in banda base, il caso in banda passante è uguale, ho:

$$x(k)=c_k+\sum_{(i\neq k)} c_i h(k-i)+n(k)$$

all'uscita del filtro e(k) ho:

$$y(k)=x(k)*e(k)=\sum_i x(i)e(k-i)=\sum_i x(k-i)e(i)$$

in tal caso scegliendo opportunamente le prese cosiddette dell'equalizzatore e(k) siamo in grado di abbattere l'ISI, al proposito esiste un Teorema:

Teorema di Lucky

Detto p(k) = h(k) * e(k)

esiste un coefficiente D per il quale:

p(D) = 1 k=D, e zero altrove per k diversi da D, k>=0

esempio:

$$x(k)=c_k+b\,c_{(k-1)}+n(k)$$

quindi:

$$h(k)=\delta(k)+b\,\delta(k-1)$$

quindi:

$$p(k)=\sum_i x(k-i)e(i)=x(k)e(0)+x(k-1)e(1)+x(k-2)e(2)$$

fermandoci alle prime tre prese dell'equalizzatore:

$$p(k)=(\delta(k)+b\,\delta(k-1))e(0)+(\delta(k-1)+b\,\delta(k-2))e(1)+(\delta(k-2)+b\,\delta(k-3))e(2)$$

poniamo D=0

quindi otteniamo un sistema di tre equazioni in tre incognite:

$$e(0)=1$$

$$b\,e(0)+e(1)=0$$

$$be(1)+e(2)=0$$

risolvendo si ha :

$$e(0)=1$$

$$e(1)=-b$$

$$e(2)=b^2$$

quindi abbiamo:

$$y(k)=c_k+b^3\nu(k)$$

ove:

$$\nu(k)=n(k)*e(k)$$

per quanto riguardala varianza di $\nu(k)$ possiamo scrivere:

$$e[(\nu(k))^2]=E[\sum_i n(k-i)e(i)\sum_i n(k-j)e(j)]=\sum_i\sum_j R_n(i-j)e(i)e(j)$$

Rn(i-j) e nonnulla solo per i=j, quindi otteniamo:

$$e[(\nu(k))^2]=(\frac{N_0}{2})\sum_i e^2(i)$$

in questo caso è:

$$e[(\nu(k))^2]=(\frac{N_0}{2})\sum_i e^2(i)=(\frac{N_0}{2})(1+b^6)$$

come si vede l'ISI è diminuita essendo certamente b<1 a pfrezzo di un leggero aumento del rumore termico. In realtà però cio' che interessa è abbattere la probabilità di errore ed è proprio cio' che questo filtro riesce a fare.

8) Fading da Multipath

In molti casi il fenomeno dell'ISI può essere parecchio importante; questo è certamente il caso dei canali Wireless, in cui tante volte non è presente un cammino diretto tra antenna trasmittente e ricevente. In tal caso c'è il fenomeno di multipath, che è presente in molti casi anche quando c'è un cammino diretto prevalente, ad esempio nel caso di ricezione in area urbana.
Nei ponti radio questo fenomeno si fa meno sentire ed è possibile per questo ragionare con un modello a due raggi;

$$\frac{(\tilde{h}(t))}{2}=\delta(t)+\alpha\,\delta(t-\tau)$$

in tal caso come già accennato questo fenomeno da dei disturbi di distorsione del segnale ricevuto quanto il ritardo del secondo cammino diviene confrontabile con l'intervallo di segnalazione del segnale trasmesso.
In area urbana invece in generale dobbiamo accettare il fatto che vi sono moltissimi cammini; ricordiamo che abbiamo i seguenti effetti propagativi in generale:

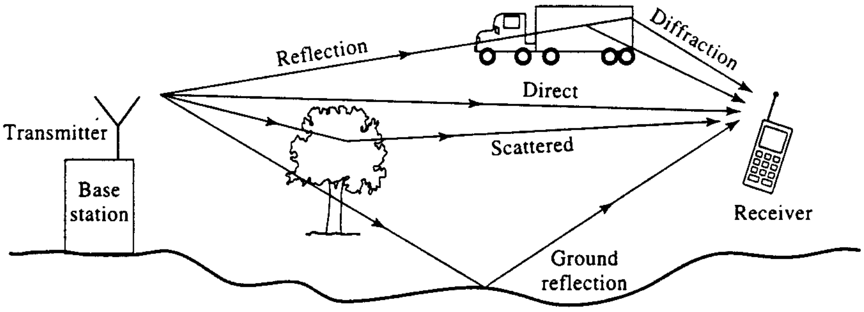
- Riflessione: dal terreno o da grandi oggetti
- Diffrazione: da oggetti piccoli la cui lunghezza è comparabile con la lunghezza d'onda del segnale(per il principio di Huyghens ogni punto diventa sorgente di onde sferiche
- Scattering: o diffusione, per superfici rugose

ed inoltre

Attenuazione: da pioggia o per spazio libero

Doppler: effetto dovuto al moto relativo tra trasmettitore e ricevitore; per esso è importante la componente di velocità relativa diretta la congiungente tra le due antenne.

Lo si può vedere dalla seguente figura



(b)

per esso possiamo quindi scrivere per il segnale ricevuto:

$$r(t)=\Re\left[\sum_i \alpha_i \tilde{s}(t-\tau_i)\, e^{(j\omega_0(t-\tau_i)+\phi_i)}\right]$$

essendo:

$\tilde{s}(t)$: l'inviluppo complesso del segnale trasmesso

τ_i : i ritardi dei singoli cammini

ϕ_i : le fasi dei singoli cammini dovute a diffrazione e riflessione subite dal segnale del singolo cammino

α_i : i coefficienti moltiplicativi dell'attenuazione subito sul singolo cammino

sviluppando otteniamo

$$r(t)=\Re\left[\sum_i \alpha_i e^{[j(\phi_i-\omega_0\tau_i)]}\tilde{s}(t-\tau_i)\, e^{(j\omega_0 t)}\right]$$

per cui la risposta impulsiva del canale viene ad assumere la forma:

$$\frac{(\tilde{h}(t))}{2}=\sum_i \alpha_i e^{(j\phi_i)}\delta(t-\tau_i)$$

quindi:

$$\frac{(\tilde{H}(f))}{2}=\sum_i \alpha_i e^{[j(\phi_i-\omega_0\tau_i)]}=\rho(t)e^{(j\phi(t))}$$

nel modello di Raylegh cioè di fading piatto la risposta in frequenza viene ad essere costante sulla banda del segnale; $\rho(t)$ varia lentamente e può essere assunta come una variabile aleatoria di raylegh, mentre $\phi(t)$ varia velocemente e può essere assunta come variabile aleatoria uniformemente distribuita in $[0,2\pi]$, quindi:

$$r(t)=\Re[\rho(t)e^{[\phi(t)]}\tilde{s}(t)e^{(j\omega_0 t)}]$$

$$\tilde{s}(t-\tau_i)\simeq\tilde{s}(t-\tau_{MIN})$$

per semplicità si può porre $\tau_{MIN}=0$.

r(t) è un processo Gaussiano, infatti supponiamo di inviare sul canale una sinusoide:

$$s(t)=\frac{(\cos(\omega_0 t))}{2}$$

si ha:

$$r(t)=\Re[\rho(t)e^{[\phi(t)]}\tilde{s}(t)e^{(j\omega_0 t)}]=\rho(t)\cos(\omega_0 t+\phi(t))$$

in banda base:

$$\tilde{r}(t)=\rho(t)e^{(\phi(t))}=\rho\cos(\phi(t))+j\rho\, sen(\phi(t))$$

ogni variabile aleatoria ha una componente immaginaria e reale di tipo gaussiano Gaussiane:

$$\tilde{r_R}=\rho\cos(\phi)$$

$$\tilde{r_I}=\rho\, sen(\phi)$$

viceversa

$$\rho=\sqrt{((\tilde{r_R})^2+(\tilde{r_I})^2)}$$

$$\phi=arctg(\frac{r_I}{r_R})$$

sono per quanto detto variabili aleatorie di Raylegh il modulo, e uniformemente distribuite la fase.

In definitiva r(t) se si invia $s(t)=\frac{(\cos(\omega_0 t))}{2}$ è un segnale in alta frequenza cosinusoidale il cui inviluppo è modulato da un'ampiezza aleatoria di Raylegh ed ha fase aleatoria uniformemente distribuita in $[0, 2\pi]$.

Abbiamo

$$f_{\rho}(\rho)=(\rho/\sigma^2)e^{(\frac{(-\rho^2)}{(2\sigma^2)})}$$

$$f_{\phi}(\phi)=(1/2\pi)rect(\frac{\phi}{(2\pi)})$$

e come si vede il segnale per quanto detto assume la seguente forma